ELEMENTEN VAN

TENSOR REKENING

Dr. G. J. HOOYMAN

september 1972

REPRODUKTIE FYSISCH LABORATORIUM

ELEMENTEN VAN

TENSOR REKENING

I N H O U D

I. INLEIDING

§ 1 Fysisch voorbeeld van een tensor 1

II. TENSOR-ALGEBRA

§ 2 Definitie van tensoren 6

§ 3 Symmetrie en anti-symmetrie 8

§ 4 De Kronecker-tensor δ 9

§ 5 Pseudo-tensoren; de Levi-Civita-tensor ε 10

§ 6 Produkten van tensoren; kontraktie 11

§ 7 Pseudo-vektoren in S_3 en anti-symmetrische tensoren 14

§ 8 Isotrope tensoren 15

§ 9 Hoofdassentransformatie 15

§10 Tensorinvarianten 17

§11 Tensoren in de fysika 18

III. TENSOR-ANALYSE

§12 Differentiëren van tensoren 23

§13 Toepassingen in de fysika 25

IV. APPENDIX

§5A De ε-tensor 29

§6A Eigenschappen van produkten 30

§7A Pseudo-vektoren in S_3. Duale tensoren in S_4 31

§10A Tensorinvarianten 32

§11A Tensoren in de fysika 32

§12A Differentiëren en integreren. Bronnen en wervels 33

§14A Algemene tensoren 39

LITERATUURLIJST 42

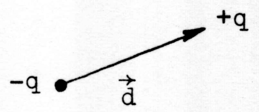
I. INLEIDING

§1 Fysisch voorbeeld van een tensor.

Tot nu toe hebben we in de fysika gebruik gemaakt van de begrippen skalar en vektor, van skalaire velden en vektorvelden in de reële, Euclidische ruimte. De analyse van deze velden bleek een geschikt wiskundig hulpmiddel te zijn om bijv. de eigenschappen van het elektromagnetische veld te formuleren, zoals beschreven door de vergelijkingen van Maxwell.

Het zal blijken, dat we naast skalaren en vektoren nog andere objekten of grootheden hebben, de zgn. tensoren. We zullen eerst aan een eenvoudig voorbeeld laten zien wat een tensor in engere zin is en dan het begrip wat algemener definiëren zodanig dat het skalaren en vektoren ook omvat.

Beschouw een neutraal atoom of molekuul dat op zich geen elektrisch dipoolmoment bezit en dat in een konstant en homogeen uitwendig elektrisch veld $\vec{e}$ gepolariseerd wordt, een geïnduceerd dipoolmoment $\vec{p}$ krijgt. Voor eenvoudige situaties (niet als $\vec{e}$ bijv. een zeer snel wisselend veld is) verwachten we dat $\vec{p}$ een funktie van $\vec{e}$ is: door de tegengesteld gerichte krachten op de positieve resp. negatieve ladingen wordt het molekuul een beetje gedeformeerd zodat de zwaartepunten van beide soorten ladingen niet meer samenvallen, maar een afstand $\vec{d}$ van elkaar liggen. Is q de totale positieve lading dan is $\vec{p} = q\vec{d}$. De vektor $\vec{d}$ volgt uit de evenwichtsvoorwaarde dat de som van de deformerende en terugdrijvende krachten nul is. Voor bolsymmetrische (isotrope) deeltjes zoals het He-atoom heeft $\vec{d}$ de richting van $\vec{e}$ zoals direkt uit de symmetrie volgt.



Voor eenvoudige atoommodellen kan men gemakkelijk afleiden dat $\vec{d} \sim \vec{e}$ en dus ook $\vec{p} \sim \vec{e}$ of

$$\vec{p} = \alpha\varepsilon_o\vec{e} \qquad (1)$$

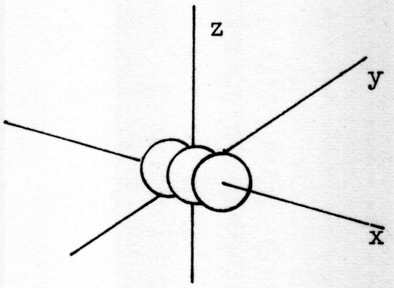
voor realistische waarden van $\vec{e}$. Een overeenkomstig resultaat levert de quantummechanika. α heet de (atomaire of molekulaire) polariseerbaarheid en heeft (door de afsplitsing van de faktor ε_o) de dimensie van een volume.

De genoemde modellen leiden alle tot een waarde van α die op een numerieke faktor van de orde 1 na gelijk is aan het "volume" van het deeltje.

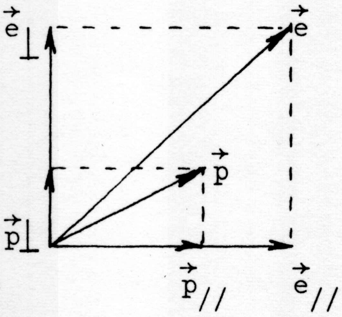
Opgave:

a) Mossotti-model: vat het atoom op als een volmaakt geleidend bolletje met straal R, dat door influentie een dipoolmoment krijgt. Bereken α.

b) Neem als atoom-model een puntvormige kern met lading Zq omgeven door een negatieve ruimtelading -Zq homogeen verdeeld over een bol met straal R. Bereken weer α. Onderstel dat de negatieve lading homogeen bolvormig blijft maar dat het middelpunt t.o.v. de kern verschoven wordt over afstand $\vec{d}$. Ga ook na dat d << R voor realistische waarden van e en R.



Bekijken we nu de polarisatie van molekulen zonder bolsymmetrie, bijv. een CO_2-molekuul. Dit is een zgn. lineair molekuul en uit de symmetrie kunt u direkt afleiden dat het geen permanent dipoolmoment heeft. Dat (1) nu niet algemeen waar kan zijn is eenvoudig in te zien. Valt $\vec{e}$ langs de molekuul-as (de x-as) dan om symmetrieredenen $\vec{p}$ ook en (1) zal gelden met zekere koëfficiënt α_1. Valt $\vec{e}$ langs de y-as dan ook $\vec{p}$ wegens symmetrie en (1) geldt met zekere koëfficiënt α_2 (wegens rotatie-symmetrie van het molekuul om de x-as blijft dit zo voor elke $\vec{e}$ in het y-z-vlak). Het valt niet te verwachten dat het molekuul in beide richtingen even goed polariseerbaar is dus zal $\alpha_1 \neq \alpha_2$ (in feite is hier ongeveer $\alpha_1 \simeq 2\alpha_2$). Hieruit volgt dat voor willekeurige richting van $\vec{e}$ het moment $\vec{p}$ een hoek zal maken met $\vec{e}$: we kunnen $\vec{e}$ ontbinden in komponenten en de polarisaties langs de molekuulas en loodrecht daarop superponeren zolang de polarisatie een lineair effekt is.



$\vec{p}$ zal dan meer in de richting van de x-as wijzen dan $\vec{e}$ omdat het molekuul langs die as het gemakkelijkst te polariseren is.

Bij het gekozen assenstelsel moet (1) dus vervangen worden door bijv. de komponent-vergelijkingen

$$\begin{aligned} p_x &= \alpha_1 \varepsilon_o e_x \\ p_y &= \alpha_2 \varepsilon_o e_y \\ p_z &= \alpha_2 \varepsilon_o e_z \end{aligned}$$

Voor een willekeurig molekuul zonder enige rotatie- of spiegelsymmetrie verwachten we een algemeen lineair verband tussen de komponenten van $\vec{e}$ en van $\vec{p}$ zoals we ook voor CO_2 krijgen bij een willekeurig gekozen assenstelsel als we de symmetrie in de struktuur van CO_2 ignoreren:

$$\begin{aligned} p_1 &= \alpha_{11}\varepsilon_o e_1 + \alpha_{12}\varepsilon_o e_2 + \alpha_{13}\varepsilon_o e_3 \\ p_2 &= \alpha_{21}\varepsilon_o e_1 + \alpha_{22}\varepsilon_o e_2 + \alpha_{23}\varepsilon_o e_3 \\ p_3 &= \alpha_{31}\varepsilon_o e_1 + \alpha_{32}\varepsilon_o e_2 + \alpha_{33}\varepsilon_o e_3 \end{aligned} \qquad (2)$$

In plaats van de enkele (skalaire!) koëfficiënt α in (1) wordt het verband tussen $\vec{e}$ en $\vec{p}$ nu gegeven door 9 koëfficiënten, die samen een <u>tensor</u> definiëren, de statische polariseerbaarheidstensor. Dit negental weerspiegelt de struktuur van het molekuul. Uiteraard zijn de 9 "tensor-komponenten" gerelateerd aan het gekozen assenstelsel en hun waarde verandert bij draaiing of spiegeling daarvan (bij CO_2 kunnen we er 6 gelijk nul krijgen, langs de hoofddiagonaal blijven er 3 over waarvan 2 gelijk).

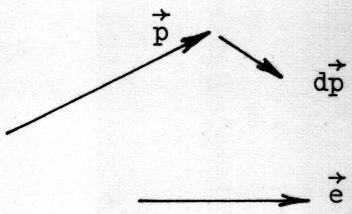
Hoewel we relaties (2) gevonden hebben voor de komponenten van $\vec{p}$ en $\vec{e}$ t.o.v. zekere koördinatenassen is het duidelijk dat het lineaire verband tussen $\vec{p}$ en $\vec{e}$ niet wezenlijk kan afhangen van een keuze van de koördinaten. In het geval van CO_2 is het wel van belang, welke hoeken $\vec{e}$ maakt met de symmetrie-assen van het molekuul, niet interessant zijn de hoeken met een toevallig gekozen koördinaten-assenstelsel. Hetzelfde geldt ook voor vektoren. Een vektor-vergelijking $\vec{A} = \vec{B}$ zoals (1) is niet alleen een verkorte notatie voor 3 komponent-vergelijkingen maar drukt ook uit dat zo'n drietal geldig is in "alle" koördinatenstelsels, dat ze koördinaten-vrij geschreven kunnen worden en in het bijzonder zo, dat ze invariant zijn voor draaiingen en eventueel spiegelingen van het aanvankelijk gekozen Cartesische stelsel.

Relaties als (2) zullen we ook koördinaten-vrij willen schrijven. Algemener : zekere stellen fysische grootheden, te beschrijven door komponenten t.o.v. een assenstelsel in een n-dimensionale vektor-ruimte (met in-produkt) voldoen aan relaties waarvan we op fysische gronden weten of postuleren dat ze invariant zijn t.o.v. (een groep van) bepaalde transformaties van de assen. We willen deze relaties dan uitdrukken door koördinaatvrije vergelijkingen, waarin skalaren, vektoren, tensoren optreden. Kennen we de algebra en de analyse voor deze grootheden dan kunnen weer nieuwe vergelijkingen worden afgeleid, die weer onafhankelijk van de keuze van koördinaten geldig zijn. Een duidelijk voorbeeld van het belang hiervan is de speciale relativiteitstheorie: de eis dat de fysika voor alle inertiale waarnemers hetzelfde is betekent dat de fysische wetten hun geldigheid moeten behouden bij een Lorentz-transformatie. Door invoering van een ruimte S_4 (ruimte-tijd-kontinuum) kunnen we nu proberen alle wetten uit te drukken in "relativistisch-invariante vergelijkingen" d.w.z. geldig t.o.v. alle koördinatenstelsels die door Lorentz-transformaties in deze S_4 uit elkaar ontstaan. We opereren dan met 4-skalaren, 4-vektoren en 4-tensoren en niet steeds met komponenten. Aan het relativiteitspostulaat is dan steeds voldaan. Bovendien is nu veel sneller te zien hoe fysische grootheden (de komponenten) transformeren.

We keren terug naar de algemene polariseerbaarheidstensor in (2). Men kan zich afvragen voor welk assenstelsel de tensor zo eenvoudig mogelijk wordt en voorts of de 9 komponenten onafhankelijk van elkaar zijn. Het voorbeeld van CO_2 laat al zien dat sommige ervan nul kunnen worden en andere gelijk kunnen zijn. Als het molekuul enigerlei symmetrie bezit (van draaiing of spiegeling) ligt het voor de hand, de assen speciaal te kiezen zodat de struktuursymmetrie direkt leidt tot zekere symmetrie-relaties in de α_{ik}. Maar er is meer. We beweren dat ook voor molekulen zonder enige ruimtelijke symmetrie (bijv. een ingewikkeld organisch molekuul) de <u>polariseerbaarheidstensor symmetrisch</u> is d.w.z.

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki} \qquad (3)$$

ongeacht de keuze van de assen.



Voor het bewijs beschouwen we een verandering $d\vec{p}$ van $\vec{p}$ als gevolg van een verandering $d\vec{e}$ van het polariserende veld. De door het veld verrichte deformatie-arbeid is daarbij $\vec{e}\cdot d\vec{p}$ (verplaatsing van lading q over $d\vec{s}$). Omdat we met konservatieve krachten te doen hebben moet deze arbeid onafhankelijk zijn van de weg waarlangs we van begin- naar eindtoestand gaan, m.a.w. $\vec{e}\cdot d\vec{p}$ moet een gesloten differentiaal zijn. Na invullen van (2) in $\vec{e}\cdot d\vec{p}$ kan men (3) direkt hieruit afleiden.

Onze tensor lijkt dus veel op een symmetrische matrix en we verwachten dus dat hij eveneens op hoofdassen gebracht kan worden door een geschikte orthogonale transformatie. Inderdaad zullen we dit vinden uit de transformatie-wijze van tensoren. Een willekeurig molekuul heeft dus 3 onderling loodrechte hoofdassen voor elektrische polarisatie en heeft ten opzichte daarvan 3 hoofdpolariseerbaarheden. Dit vindt toepassing o.a. in de molekulaire optika (zie bijv. Born, Optik).

II. TENSOR-ALGEBRA

§2 Definitie van tensoren.

We beschouwen een n-dimensionale lineaire ruimte S_n waarin een inwendig produkt gedefinieerd is en waarin dus orthonormale bases gekozen kunnen worden. Overgaan van de ene basis op een andere gebeurt door (de groep van) orthogonale reële transformaties met matrices $A = (\alpha_{ik})$.

N.B. Dit is dus de "alias"-interpretatie van de transformatie. De resultaten worden niet principieel anders bij de "alibi"-interpretatie: een isometrie van S_n met behoud van basis. In fysische toepassingen zullen we die ook vaak gebruiken.

De gebruikelijke definitie van een n-dimensionale tensor (van de 2e trap, orde, rang of valentie) is: een systeem van n^2 grootheden of komponenten T_{ij} ten opzichte van een basis van S_n die bij overgang op een andere basis transformeren volgens

$$T'_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \alpha_{ik}\alpha_{jl}T_{kl} \qquad (4)$$

Zo'n tensor is dus een objekt met komponenten t.o.v. elk orthogonaal assenstelsel waarvan de transformatiewijze door (4) bepaald is. Let wel: (4) is niet een "definitie" van de T'_{ij}. Dat een stel fysische grootheden komponenten van een tensor zijn betekent uiteindelijk dat we op grond van empirische gegevens weten hoe die grootheden veranderen bij draaiingen en spiegelingen van assenstelsels. Als ze aan (4) voldoen vormen ze samen een tensor.

Iets algemener definieert men een n-dimensionale tensor van de p^e trap (orde, rang of valentie) als een systeem van n^p komponenten $T_{i_1,i_2 \ldots i_p}$ ten opzichte van een basis van S_n die transformeren volgens

$$T'_{i_1 i_2 \ldots i_p} = \sum_{j_1=1}^{n} \ldots \sum_{j_p=1}^{n} \alpha_{i_1 j_1}\alpha_{i_2 j_2}\ldots\alpha_{i_p j_p} T_{j_1 \ldots j_p} \qquad (5)$$

Een tensor van de 0^e trap is dus een skalar : een enkele "komponent" die invariant is voor alle orthogonale transformaties van S_n.

Een tensor van de 1^e trap is niets anders dan een vektor v. Inderdaad: de n komponenten v_i transformeren volgens (5) als

$$v_i' = \sum_k \alpha_{ik} v_k \qquad (6)$$

dus precies als de komponenten van de elementen van de vektor-ruimte S_n. Een vektor is dus t.o.v. zekere basis bepaald door een rij van n komponenten, eventueel te schrijven als kolom-matrix met n elementen. Als objekt kan de vektor door een enkel symbool worden gerepresenteerd; is het een vektor in de gewone fysische ruimte (n = 3) dan meestal vet gedrukt of voorzien van een pijl.

Een tensor van de 2^e trap (doorgaans kortweg tensor genoemd) is t.o.v. zekere basis bepaald door n^2 komponenten, die in een vierkante matrix kunnen worden geschreven (2 x 2, 3 x 3 etc.) en heeft dan ook zekere algebraische eigenschappen gemeen met vierkante matrices. Als objekt weer voor te stellen door een enkel symbool, meestal in een apart lettertype, bijv. T, S e.d.

De lineaire kombinatie $\lambda T + \mu S$ van twee tensoren T en S van dezelfde trap p en dimensie n wordt gedefinieerd door lineaire kombinatie van overeenkomstige komponenten. Ga na dat zo weer een tensor van trap p en dimensie n ontstaat. Tensoren van dezelfde p en n vormen dus een lineaire ruimte, die we een tensor-ruimte zouden kunnen noemen.

Men dient goed onderscheid te maken tussen de dimensie n van een tensor en de orde of trap p. Een tensor van de 3^e trap met dimensie 4 kan men eventueel weergeven als 64 komponenten in de roosterpunten van een kubisch rooster 4 x 4 x 4. Bij hogere trap is er geen aanschouwelijk hulpmiddel meer, bij hogere dimensie neemt alleen de ribbe van de kubus toe.

We zijn ons er van bewust dat bovenstaande definitie lakunes heeft. Zo weten we dat elke fysische grootheid een fysische "dimensie" heeft en dat we alleen grootheden van gelijke fysische dimensie lineair kunnen kombineren. Bij elke fysische dimensie zouden we dus eigen tensor-ruimtes moeten invoeren, bijv. een snelheidsruimte, een veldsterkte-ruimte etc. Voor de praktijk hebben deze onderscheidingen weinig zin.

Ook is de gegeven definitie van een tensor meer praktisch dan streng-axiomatisch. Ook hier zullen we geen poging doen alle gewenste verfijningen aan te brengen.

Het gaat er om dat zekere fysische grootheden, hoewel bepaald t.o.v. assenstelsels, aan wetten of relaties voldoen die voor elke keuze van het assenstelsel gelden en we zullen dus proberen, onze vergelijkingen koördinatenvrij te schrijven. Soms wordt dat een beetje gekunsteld, maar meestal is het mogelijk en ook overzichtelijk, indices-vrije symbolen te gebruiken zoals $\vec{v}$ voor een vektor in S_3, een letter met 2 pijlen voor een tensor in S_3 of i.h.a. kursieve letters voor tensoren van enigerlei trap. Bij uitschrijven met indices zullen we de sommatie-konventie van Einstein aanhouden, d.w.z. we laten somtekens weg en spreken af dat over een index die in een produkt tweemaal voorkomt gesommeerd wordt van 1 t/m n.

§3 Symmetrie en anti-symmetrie.

Verwisseling van indices van een tensor (p, n) met $p \geq 2$ geeft weer een tensor (p, n). Is bijv. T tensor van de 3^e^ trap dan zijn met T_{ijk} ook T_{jki}, T_{kij}, T_{jik} enz. komponenten van een 3e trapstensor (isomere tensoren). Is daarbij bijv. $T_{jik} = T_{ijk}$ dan heet T symmetrisch in de indices i en j. Is een tensor gelijk aan al zijn isomeren dan heet hij kortweg symmetrisch. Voor een tensor van de 2e trap is er maar één isomeer, die de gespiegelde heet, notatie $\tilde{T}$. Symmetrie betekent dan

$$T = \tilde{T} \qquad (7)$$

en deze tensor heeft $\frac{1}{2}n(n + 1)$ onafhankelijke komponenten. Veranderen alle komponenten van een tensor (p, n) van teken bij verwisseling van indices i en j dan heet hij anti-symmetrisch in i en j. Geldt dit voor elk paar i, j dan heet hij kortweg anti-symmetrisch. Elke komponent waarvan minstens 2 indices gelijk zijn is dan nul. Een anti-symmetrische tensor van de 2^e^ trap heeft nullen op de "hoofddiagonaal" en verder $\frac{1}{2}n(n - 1)$ onafhankelijke komponenten.

Een gegeven T kan gesymmetriseerd worden: we vormen er een symmetrische uit door het gemiddelde te nemen van alle isomeren. Bijv. bij trap 3

$$S_{ijk} = \frac{1}{6}(T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} + T_{ikj} + T_{kji} + T_{jik}) \qquad (8)$$

Evenzo wordt een anti-symmetrische tensor gevormd door in de som van isomeren het + teken door - te vervangen als het isomeer ontstaan is uit T door oneven permutatie van de indices. Bijv.

$$A_{ijk} = \frac{1}{6}(T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} - T_{ikj} - T_{kji} - T_{jik}) \qquad (9)$$

(hoeveel verschillende komponent-waarden heeft deze tensor in S_3?)

Was T zelf symmetrisch resp. anti-symmetrisch dan is natuurlijk $S = T$ en $A = 0$, resp. $S = 0$ en $A = T$. Een tensor van de 2^e trap kan uniek gesplitst worden in een symmetrisch en een anti-symmetrisch deel:

$$T = \tfrac{1}{2}(T + \tilde{T}) + \tfrac{1}{2}(T - \tilde{T}) = T_S + T_A \qquad (10)$$

(10) geldt alleen voor tensoren van trap 2.

Ga zelf na, dat deze symmetrie-uitspraken transformatie-invariant zijn.

§4 De Kronecker-tensor δ.

Het Kronecker-symbool δ_{ij}, gedefinieerd door

$$\left.\begin{aligned} \delta_{ij} &= 1 \quad \text{als } i = j \\ \delta_{ij} &= 0 \quad \text{als } i \neq j \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

bepaalt in elke S_n de komponenten van een tensor van de 2e trap. Immers: bij formeel transformeren ontstaat $\delta'_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{jl}\delta_{kl}$ maar dat is niets anders dan δ_{ij} wegens de orthogonaliteit van de matrix (α_{ik}).

De tensor δ heet ook wel de eenheidstensor, bij het vormen van inwendige produkten (zie verder) gedraagt hij zich als de eenheid.

Het is voorts een van de tensoren waarvan de komponenten niet veranderen bij een orthogonale transformatie, de zgn. isotrope tensoren.

§5 Pseudo-tensoren; de Levi-Civita-tensor ε

De groep van alle reële orthogonale transformaties met matrices $A = (\alpha_{ik})$ in S_n heeft als ondergroep de transformaties met determinantwaarde Δ gelijk aan + 1. In S_3 zijn dit de draaiingen, de transformaties met $\Delta = -1$ worden voortgebracht door deze draaiingen en spiegeling aan de oorsprong (een rechts-georienteerde basis gaat daarbij over in een links-georienteerde en omgekeerd).

We spreken van een pseudo-tensor als de komponenten "op het teken na" volgens (5) transformeren. Preciezer: als

$$T'_{i_1 \dots i_p} = \Delta \, \alpha_{i_1 j_1} \dots \alpha_{i_p j_p} T_{j_1 \dots j_p} \qquad (12)$$

Dus dezelfde transformatie als van tensoren zolang $\Delta = + 1$ maar een extra - teken bij $\Delta = - 1$.

De hierboven gegeven algebra geldt ook voor pseudo-tensoren. Alleen de lineaire kombinatie van een tensor en een pseudo-tensor is i.h.a. noch een tensor noch een pseudo-tensor (tenzij we ons uitdrukkelijk tot $\Delta = + 1$ zouden beperken).

Een voorbeeld dat u al kent zijn vektoren in S_3: we noemen echte vektoren daar ook wel polaire vektoren en pseudo-vektoren axiale vektoren. Zijn $\vec{a}$ en $\vec{b}$ polair dan is het uit-produkt $\vec{a} \times \vec{b}$ axiaal (ga het na!), zijn beide axiaal dan ook $\vec{a} \times \vec{b}$, terwijl het uit-produkt van een polaire en een axiale vektor zelf polair is.

Een voorbeeld van een pseudo-skalar in S_3 is het in-produkt van een polaire en een axiale vektor, bijv. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ d.i. het georienteerde volume van het op $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ beschreven parallelopipedum.

Een pseudo-tensor van de 3^e trap in S_3 krijgen we uit het ε-symbool van Levi-Civita:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} &= 0 && \text{als minstens 2 indices gelijk zijn} \\ \varepsilon_{ijk} &= 1 && \text{voor elke even permutatie van 1,2,3} \\ \varepsilon_{ijk} &= -1 && \text{voor elke oneven permutatie van 1,2,3} \end{aligned} \qquad (13)$$

dus $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$ en $\varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1$.

Met dit symbool kunnen we de determinant van een willekeurige 3 x 3 - matrix M schrijven als de som

$$\det M = M_{1i}M_{2j}M_{3k}\varepsilon_{ijk} \tag{14}$$

waarin de indices 1, 2 en 3 ook nog cyclisch verwisseld mogen worden (even permutatie van de matrix-rijen).

Definitie (13) geldt voor elk koördinatenstelsel. De ε_{ijk} vormen inderdaad een isotrope pseudo-tensor, een anti-symmetrische tensor, die de namen heeft, ε-tensor, alternerende tensor of tensor van Levi-Civita. Voor het bewijs gaan we formeel transformeren:

$$\varepsilon'_{pqr} = \alpha_{pi}\alpha_{qj}\alpha_{rk}\varepsilon_{ijk}$$

Zijn p, q en r een even permutatie van 1, 2 en 3 dan is dit volgens (14) juist de determinant Δ van (α_{ik}) en dus is het dan ook $\Delta\varepsilon_{pqr}$; zijn p, q en r een oneven permutatie van 1, 2 en 3 dan is het rechterlid - Δ en dus ook weer $\Delta\varepsilon_{pqr}$ en hetzelfde is waar als in het drietal p, q en r minstens twee gelijk voorkomen. De getransformeerde van ε_{pqr} is dus op een faktor Δ na weer ε_{pqr}.

Voor enkele toepassingen en uitbreiding tot dimensie n zie de Appendix, §5 A.

§6 Produkten van tensoren; kontraktie.

In de tensor-algebra kent men twee soorten produkten. Het eerste heet het tensoriële, ook wel het uitwendige of dyadische produkt, dat als volgt gedefinieerd wordt: zijn T en S beide tensor van dimensie n, resp. van trap p en q, dan vermenigvuldigen we elke komponent van T met elke van S. De produkten vormen een tensor TS (dimensie n, trap p + q) met komponenten

$$(TS)_{ij..st..w} = T_{ij..s}S_{t..w} \tag{15}$$

Bewijs zelf het tensor-karakter van TS.

Deze produktvorming is distributief en associatief, maar niet kommutatief. Is een van de faktoren pseudo en de andere echt dan is het produkt pseudo. Evenzo is èen produkt van 3 of meer tensoren echt (resp. pseudo) bij een even (resp. oneven) aantal pseudo's onder de faktoren.

Een voorbeeld is het tensoriële produkt van twee vektoren a en b , een tensor D van trap 2 die ook wel dyade heet:

$$D = ab \quad \text{of} \quad D_{ik} = a_i b_k \tag{16}$$

met symmetrisch deel $\frac{1}{2}(ab + ba)$ en anti-symmetrisch deel $\frac{1}{2}(ab - ba)$. Evenzo vormt men polyaden, bijv. de tensor $abcdef$ van trap 6.

De beschreven produktvorming leidt tot tensoren van hogere trap dan die van de faktoren. Alvorens een tweede soort produkten te introduceren voeren we een operatie in die de trap van een tensor verlaagt, nl. de kontraktie: stel in de algemene komponent twee van de indices gelijk en sommeer daarvoor van 1 t/m n (de trap p moet dus minstens 2 zijn). De aldus gevormde sommen (met de sommatie-konventie genoteerd) zijn komponenten van een nieuwe tensor waarvan de trap p - 2 is. Geef zelf het bewijs.

Is T van trap 2 dan geeft kontraktie de som van de komponenten in de hoofddiagonaal, ook wel het spoor van T genoemd:

$$\sigma(T) = T_{ii} \tag{17}$$

σ is dus een skalar, zoals we ook nog langs andere weg zullen zien.

Is $p > 2$ dan kan men op verschillende manieren kontraheren en moet aangegeven worden naar welk tweetal indices er gekontraheerd wordt. Is $p \geq 4$ dan kan men dubbel of meervoudig kontraheren.

We kunnen nu het inwendige produkt $T \cdot S$ van T en S (zelfde dimensie, trap p resp. q) definiëren: het is het tensoriële produkt TS, eenmaal gekontraheerd naar de "naast elkaar staande" indices van T en S , d.w.z.

$$(T \cdot S)_{ij..rt..w} = T_{ij..rs} S_{st..w} \tag{18}$$

Ook dit produkt is in het algemeen niet kommutatief, wel distributief.
Het is een tensor (evt. pseudo) van de trap p + q - 2.
Het eenvoudigste voorbeeld is het in-produkt van twee vektoren, dat wel kommutatief is.

Zijn zowel p als q $\geq$ 2 dan kunnen we ook het <u>dubbel gekontraheerde</u> produkt $T : S$ vormen:

$$(T : S)_{ij..qt..w} = T_{ij..qrs}S_{rst..w} \qquad (19)$$

waarin gesommeerd wordt over een <u>tweetal</u> naast elkaar staande indices van T en S. Het is een tensor van trap p + q - 4.

<u>N.B</u>. Sommige auteurs gebruiken de notatie $T : S$ voor de <u>herhaald</u> gekontraheerde tensor TS d.w.z.

$$(T : S)_{ij..qt..w} = T_{ij..qrs}S_{srt..w}$$

Dat is een andere tensor dan (19).

Evenzo kan men een tensor bij voldoend grote orde naar meer dan een paar indices kontraheren en ook meervoudig gekontraheerde produkten vormen. Steeds is het resultaat een tensor of pseudo-tensor. Ga dat zelf nog eens na voor (18) en (19). Omgekeerd is ook waar dat, slordig gezegd, een faktor tensorkarakter bezit als zowel de andere faktor als het produkt tensoren zijn. Preciezer:

Als een stel komponenten $X_{ij...}$ in S_n bij formele vermenigvuldiging (uitwendig of inwendig) met een tensor $T_{pq...}$ in S_n met willekeurige komponenten een tensor oplevert zijn de $X_{ij...}$ komponenten van een tensor.

U kunt dit algemeen bewijzen maar voorbeelden zijn duidelijker, zoals:

- is $\vec{a}$ een vektor en $a_i x_i$ een skalar in S_3 dan vormen de x_i een vektor;
- is T een tensor van de 2^e orde in S_n en zijn $T_{ij}X_{kl}$ komponenten van een 4^e orde-tensor dan zijn de X_{kl} komponenten van een 2^e orde-tensor in S_n.

Dit kriterium voor het tensorkarakter zullen we in de fysika herhaaldelijk hanteren. U kunt zelf gemakkelijk het kriterium uitbreiden tot pseudotensoren.
In de Appendix, § 6A, vindt u een aantal identiteiten voor produkten.

§7 Pseudo-vektoren in S_3 en anti-symmetrische tensoren.

Het gebruik van pseudo-vektoren kan in S_3 vermeden worden. De komponenten van deze vektoren (zoals de magnetische induktie $\vec{B}$, een hoeksnelheid $\vec{\omega}$, impulsmomenten etc.) blijken nl. ook komponenten te zijn van een (echte) anti-symmetrische tensor van de 2e trap en omgekeerd.

Iets algemener: er is een 1-1-toevoeging van vektor $\vec{a}$ aan anti-symmetrische tensor A van trap 2 in 3 dimensies, waarbij de 3 onafhankelijke komponenten van A juist de 3 komponenten van $\vec{a}$ zijn. De toevoeging is voor willekeurige $\vec{a}$

$$A = \varepsilon_3 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{20}$$

en omgekeerd voor willekeurige A

$$\vec{a} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_3 : A = (A_{23}, A_{31}, A_{12}) \tag{21}$$

We zien: is $\vec{a}$ pseudo dan is A echt en omgekeerd; is $\vec{a}$ echt dan is A pseudo en omgekeerd.

We zouden het gebruik van pseudo-vektoren in S_3 desgewenst kunnen vermijden in vektor-algebra en -analyse door steeds met de daarmee ekwivalente tensoren te rekenen.

Een voorbeeld ervan is het uit-produkt $\vec{a} \times \vec{b}$: de er mee ekwivalente tensor blijkt te zijn $\vec{a}\vec{b} - \vec{b}\vec{a}$ d.i. tweemaal het anti-symmetrische deel van de dyade $\vec{a}\vec{b}$. Zie verder de Appendix, §7 A.

§8 Isotrope tensoren.

Zoals gezegd zijn dit tensoren, waarvan de komponenten t.o.v. alle orthonormale bases in S_n dezelfde waarde hebben, dus invariant zijn bij draaiingen en spiegelingen. We zullen voor enkele gevallen aangeven welke tensoren of pseudo-tensoren isotroop zijn. Voor bewijzen verwijzen we naar boeken (o.a. Jeffreys).

Skalaren zijn bij definitie isotroop. Voor elke dimensie n is er geen isotrope tensor van de trap 1 behalve de nul-vektor (bewijs het voor n = 3).

De enige isotrope tensor van de trap 2 is voor elke n de tensor δ (en natuurlijk skalare veelvouden daarvan).

In S_3 is er van de trap 3 alleen de pseudo-tensor ε_3, in S_4 is er geen isotrope tensor van de trap 3.

Zowel in S_3 als in S_4 is het tensorieel produkt van δ met zichzelf, dus $\delta_{ij}\delta_{kl}$, isotroop. De meest algemene isotrope tensor van trap 4 is

$$\eta_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\delta_{ik}\delta_{jl} + \nu\delta_{il}\delta_{jk} \tag{22}$$

waarin λ, μ en ν skalaren zijn.

In S_4 is er bovendien nog één isotrope tensor, nl. de pseudo-tensor ε_4.

§9 Hoofdassentransformatie.

De overeenkomst tussen een tensor van de 2e trap en een vierkante matrix, ook in hun gedrag bij orthogonale transformaties, brengt mee dat ook tensoren in diagonaalvorm kunnen worden gebracht. In het wiskunde-kollege "Algebra" wordt dit uitgewerkt voor matrices, we herhalen de afleiding in het kort voor symmetrische tensoren.

Zij S symmetrische tensor van trap 2 en dimensie n. We vragen naar eigen-vektoren $\boldsymbol{x}$ d.w.z. vektoren die voldoen aan

$$S\cdot x = \lambda x \tag{23}$$

met λ een skalar, die eigenwaarde van S heet. Dit is een n-tal homogene, lineaire, algebraische vergelijkingen dat dan en slechts dan een niet-triviale oplossing heeft indien

$$\det\,(S - \lambda\delta) = 0 \tag{24}$$

d.i. een n^e graadsvergelijking in λ die sekuliere vergelijking, karakteristieke vergelijking of eigenwaarde-vergelijking heet. Zijn $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ verschillende eigenwaarden dan zijn de erbij behorende eigenvektoren $x_1, \ldots$ .., x_k lineair onafhankelijk. Uit de symmetrie van S volgt dat alle oplossingen van (24) reëel zijn en dat twee eigenvektoren bij verschillende eigenwaarden onderling orthogonaal zijn. Zijn alle n eigenwaarden verschillend (als det $S \neq 0$ is geen ervan nul) dan vormen de eigenvektoren x_1, ..., x_n na normering een orthonormale basis. Op deze basis krijgt S de diagonaalvorm

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & & & 0 \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{of } S_{ik} = \lambda_i \delta_{ik} \qquad (25)$$

Zoals u weet blijft dit mogelijk als (24) meervoudige wortels heeft (ontaarding). Bij een k-voudige eigenwaarde is er een k-dimensionale deelruimte van S_n waarin elke vektor eigenvektor is bij deze eigenwaarde (dus een invariante deelruimte bij S). Daarin kan op oneindig veel manieren een orthonormale basis van eigenvektoren gekozen worden. Aangevuld met genormeerde eigenvektoren in het orthoplement van die deelruimte geven ze weer een orthonormale basis in S_n waarbij S de vorm van (25) heeft.

Als x ligt in de bovenbedoelde k-dimensionale deelruimte D_k en y in het orthoplement ervan (d.w.z. $x \cdot y = 0$ voor elke x uit D_k) dan ligt $S \cdot x$ ook in D_k (want $= \lambda_k x$) en $S \cdot y$ in het orthoplement. Uit de symmetrie van S volgt immers

$$(S \cdot y) \cdot x = (S \cdot x) \cdot y = \lambda_k x \cdot y = 0 \quad \text{voor elke } x \text{ uit } D_k$$

De transformatiematrix (α_{ik}) die S op hoofdassen brengt volgt direkt als de eigenvektoren gevonden zijn: de k^e kolom bevat juist de komponenten van de genormeerde eigenvektor x_k t.o.v. de uitgangsbasis.

De vergelijking

$$x \cdot S \cdot x = S_{ik} x_i x_k = \text{konstant} \qquad (26)$$

bepaalt een tweedegraads hypervlak of kwadriek in S_n dat ook het bij S horende tensoroppervlak heet of, in het vaak voorkomende geval dat elke $\lambda_i > 0$, ook tensorellipsoide; de oorsprong is het middelpunt van deze kwadriek. Het linkerlid van (23) geeft de normaal op het hypervlak in het punt x daarvan; (23) vraagt dus naar de richtingen waarin voerstraal en normaal samenvallen (de hoofdassen).

Op hoofdassen reduceert (26) zich tot

$$\lambda_i x_i^2 = \text{konstant} \qquad (27)$$

Speciaal in S_3: is $\lambda_1 = \lambda_2$ dan ontstaat een omwentelingsoppervlak om de x_3-as, is $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ dan een bol.

§10 Tensorinvarianten.

Er zijn eenvoudige funkties van tensorkomponenten, die skalaren zijn, d.w.z. invariant bij alle orthogonale transformaties. We hebben al ontmoet het lengte-kwadraat van een vektor, het spoor (17) van een tensor van de 2^e trap, p-voudig gekontraheerde produkten van tensoren van trap p met zichzelf.

Voor tensoren van de 2^e trap kunnen we systematisch invarianten vinden uit de sekuliere vergelijking (24): het linkerlid, dat ook wel de karakteristieke vorm bij die tensor heet, is namelijk invariant bij elke echte tensor T (niet noodzakelijk symmetrisch). (24) is dus onafhankelijk van de keuze van de basis (daarom konden we ook spreken van de eigenwaarden en de eigenvektoren van zo'n tensor). Inderdaad, als $A = (\alpha_{ik})$ komt er (in verkorte, symbolische notatie) na transformatie

$$\det (ATA^{-1} - \lambda\delta) = \det A(T - \lambda\delta)A^{-1} = \det (T - \lambda\delta) \qquad (28)$$

De koëfficiënten van λ^n, λ^{n-1}, ..., λ^1, λ^0 zijn dus invarianten. Die van λ^n is $(-1)^n$, er blijven n niet-triviale invarianten over, evenals bij een matrix bestaande uit sommen van onderdeterminanten. De koëfficiënt van λ^{n-1} is $(-1)^{n-1}\,\sigma(T)$ dus essentieel het spoor (17), tevens som van alle eigenwaarden; die van λ^0 is det T. Zie verder de Appendix §10 A.

Tenslotte merken we op dat elke T van de 2^e trap geschreven worden als de som van een "spoorloze" tensor en een isotrope tensor:

$$T = \{T - \frac{1}{n}\,\sigma(T)\delta\} + \frac{1}{n}\,\sigma(T)\delta \qquad (29)$$

§11 Tensoren in de fysika.

Ofschoon u in de fysika al voortdurend skalaren en vektoren in S_3 hebt gebruikt, is het goed te bedenken, dat het "tensorkarakter" van deze objekten zelden expliciet werd nagegaan.

Niettemin is daarin steeds een aantal (soms moeilijk terug te vinden) empirische gegevens verdiskonteerd. Als alle informatie over de kracht op een bewegende lading (grootte, richting, richtingszin in afhankelijkheid van q en $\vec{v}$) zich laat samenvatten in de Lorentz-uitdrukking $q\{\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\}$ bevat dit impliciet dat $\vec{B}$ een vektor is en wel een axiale vektor (gegeven dat q een skalar is en $\vec{F}$ en $\vec{v}$ polaire vektoren). Uiteindelijk is dit een empirisch gegeven.

Voorbeelden van tensoren van de 2^e trap hebben we al ontmoet. De relaties (2) steunen uiteindelijk ook op empirie. Dat ze een verband geven tussen de vektoren $\vec{e}$ en $\vec{p}$ voor willekeurige $\vec{e}$ (uiteraard binnen realistische grenzen) garandeert volgens het eerder genoemde kriterium dat de 9 komponenten een tensor vormen. Een ander voorbeeld was de tensor χ (of ε) voor anisotrope diëlektrika (zie werkkollege).

Een voorbeeld uit de mechanika is de traagheidstensor I, die optreedt bij de beschrijving van de rotatie van een star (stijf) lichaam (zie diktaat Klassieke Mechanica, p. 70 e.v.). We kiezen een vast punt van het lichaam; dit punt beweegt t.o.v. een inertiaal stelsel, deze beweging laten we buiten beschouwing en kiezen het punt als oorsprong. We kiezen in het bijzonder het zwaartepunt van het lichaam omdat de beschrijving dan het eenvoudigst wordt. De instantane beweging van het lichaam is dan altijd een draaiing zodat voor elk massadeeltje i de snelheid op dat moment is $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$.

Het impulsmoment $\vec{J}$ is

$$\vec{J} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_i m_i \{(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i)\vec{\omega} - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})\vec{r}_i\} =$$

$$= \sum_i m_i \{r_i^2 \delta - (\vec{r}_i \vec{r}_i)\} \cdot \vec{\omega}$$

waarin nu de dyade $\vec{r}_i \vec{r}_i$ is opgenomen (voor een kontinue beschrijving van het lichaam komen er integraties i.p.v. sommaties). Omdat $\vec{J}$ en $\vec{\omega}$ pseudovektoren zijn is de grootheid tussen {} een echte tensor en we komen zo tot de traagheidstensor I, gedefinieerd als

$$I = \sum_i (m_i r_i^2 \delta - m_i \vec{r}_i \vec{r}_i) = \sum_i m_i \{Sp(\vec{r}_i \vec{r}_i)\delta - \vec{r}_i \vec{r}_i\} \qquad (30)$$

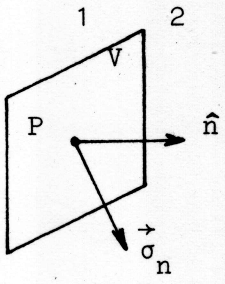
In de hoofddiagonaal staan de zgn. traagheidsmomenten, bijv. $I_{11} = \sum_i m_i (r_i^2 - x_i^2) = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2)$, de andere komponenten heten wel deviatiemomenten, bijv. $I_{12} = - \sum_i m_i x_i y_i$. Zoals uit (30) blijkt is I symmetrisch en kan dus op hoofdassen gebracht worden: elk lichaam heeft zeker 3 onderling loodrechte hoofdtraagheidsassen met ten opzichte daarvan 3 hoofdtraagheidsmomenten. We herschrijven $\vec{J}$ dus als

$$\vec{J} = I \cdot \vec{\omega} \qquad (31)$$

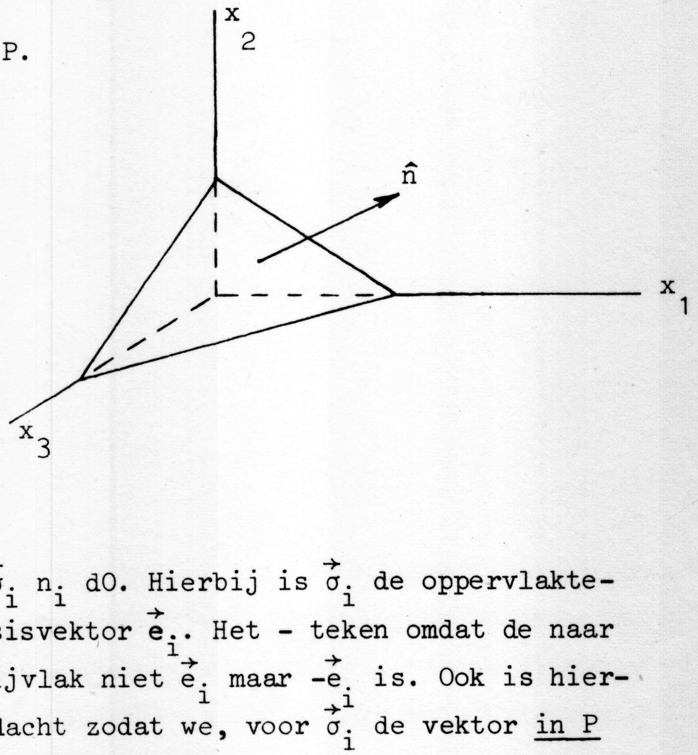
en i.h.a. zullen $\vec{\omega}$ en $\vec{J}$ een hoek $\neq 0$ met elkaar maken.

Een voorbeeld uit de mechanika van kontinue media is de spanningstensor. Aan dit voorbeeld ontlenen tensoren hun naam (tendere = spannen, tensio = spanning) en de naam spanningstensor is eigenlijk een pleonasme.

Denk een vlak V door een deformeerbaar medium waarin punt P. De twee delen aan weerszijden van het vlak oefenen op elkaar reaktiekrachten uit (eenvoudig voorbeeld: de 'spanning' in een koord). Zij $\hat{n}$ normale eenheidsvektor in P die van 1 naar 2 wijst. De reaktiekracht die op deel 1 werkt, in P genomen per eenheid van oppervlak, dus de oppervlaktespanning in P, horend bij $\hat{n}$, zij $\vec{\sigma}_n$ (in evenwicht zal uiteraard op 2 in P de oppervlaktespanning $-\vec{\sigma}_n$ werken). Deze $\vec{\sigma}_n$ zal i.h.a. een hoek ($\leqq \pi/2$) met $\hat{n}$ maken en dus een komponent $//\hat{n}$ hebben (normale spanning) en een in V (schuifspanning). Hiermee is de 'spanningstoestand' echter nog niet beschreven: bij een andere keuze van V en $\hat{n}$ in P zal een andere oppervlaktespanning behoren. Denk nu een orthogonaal assenstelsel met P als oorsprong en voorts een willekeurig georiënteerd vlak met normaal $\hat{n}$



en (infinitesimale) afstand dh tot P. Dit vlak snijdt uit het oktant tussen de koördinaatvlakken een viervlak uit. We willen de evenwichtsvoorwaarde uitschrijven voor de materie binnen dat viervlak. Is dO het oppervlak, horend bij $\hat{n}$, dan zijn de 3 zijvlakken groot n_i dO. De krachten die de omgeving op het viervlak uitoefent zijn $\vec{\sigma}_n$ dO en (met i = 1, 2, 3) $-\vec{\sigma}_i n_i$ dO. Hierbij is $\vec{\sigma}_i$ de oppervlaktespanning in P, horend bij de i^e basisvektor $\vec{e}_i$. Het - teken omdat de naar buitenwijzende normaal op het i^e zijvlak niet $\vec{e}_i$ maar $-\vec{e}_i$ is. Ook is hierbij het viervlak infinitesimaal gedacht zodat we, voor $\vec{\sigma}_i$ de vektor in P nemend, termen van hogere orde niet opschrijven.



Bij het opstellen van de evenwichtsvoorwaarde moeten we ook denken aan uitwendige krachten op het viervlak (gravitatie, traagheidskrachten, centrifugale krachten e.d.). Die zijn echter steeds in laagste orde evenredig met het volume en dus ∿ dh dO terwijl de oppervlaktekrachten ∿ dO zijn. De eerste gaan dus (als dh → o bij vaste $\hat{n}$) sneller naar nul dan de tweede. Dus moeten de oppervlaktekrachten op zichzelf tot evenwicht leiden. De evenwichtsvoorwaarde luidt dus:

$$\vec{\sigma}_n = \vec{\sigma}_1 n_1 + \vec{\sigma}_2 n_2 + \vec{\sigma}_3 n_3 \qquad (32)$$

Hier staat een lineaire relatie tussen de komponenten van $\hat{n}$ en die van $\vec{\sigma}_n$, de gezochte relatie die aan elke richting $\hat{n}$ in P toevoegt de bijbehorende $\vec{\sigma}_n$. Omdat $\hat{n}$ en $\vec{\sigma}_n$ echte vektoren zijn en (32) geldt voor elke $\hat{n}$ vormen de 9 'koëfficiënten' (van elke $\vec{\sigma}_i$ 3 komponenten) stellig de komponenten van een tensor, de <u>spanningstensor σ</u> en (32) is dus ook

$$\vec{\sigma}_n = \sigma \cdot \hat{n} \qquad (33)$$

waarbij σ_{ij} de i^e komponent is van de vektor $\vec{\sigma}_j$, dus $\sigma_{ij} = (\vec{\sigma}_j)_i$. Gegeven dus de 3 oppervlaktespanningen in P, horend bij de 3 basisvektoren $\vec{e}_i$, is σ bekend en geeft (33) de oppervlaktespanning in P, horend bij een vlak ⊥ willekeurige $\hat{n}$.

Er is nog een tweede evenwichtsvoorwaarde: de oppervlaktekrachten op een volume-element moeten niet alleen een resultante nul hebben, maar ook een resulterend moment nul (zeer uitzonderlijke gevallen buiten beschouwing gelaten). Die krachten moeten dus niet tot een impulsmoment (spin) van het volume-element leiden (ook hier kunnen we momenten van 'volumekrachten' weer buiten beschouwing laten). Omdat de som der krachten nul is, is het totale moment onafhankelijk van de keuze van een referentiepunt ten opzichte waarvan dit moment genomen wordt.

Deze voorwaarde betekent dat σ <u>symmetrisch</u> moet zijn:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \text{ of } (\vec{\sigma}_j)_i = (\vec{\sigma}_i)_j \qquad (34)$$

Probeer dit zelf af te leiden, bijv. voor het viervlak. De 4 krachten grijpen aan in de zwaartepunten der 4 zijvlakken, kies P als referentiepunt. Nog eenvoudiger is de afleiding voor een kubusvormig volume-element.

σ kan dus op hoofdassen gebracht worden: het viervlak kan op minstens 1 manier zo gedraaid worden dat op de 3 zijvlakken, die in P samenkomen alleen normale spanningen en geen schuifspanningen werken. Als de 3 eigenwaarden van σ gelijk zijn, dus σ een veelvoud van de eeinheidstensor δ , dan is $\vec{\sigma}_n \sim \hat{n}$ dus werkt op elk willekeurig vlakje door P alleen een normale spanning. Een voorbeeld daarvan is de statika van een normale vloeistof: omdat kohesiekrachten daar relatief klein zijn treden geen 'positieve' spanningen $\vec{\sigma}_n$ op maar 'negatieve' d.w.z. een druk inplaats van een normale spanning; inplaats van σ komt nu $- P\delta$ waarin P de skalare alzijdige hydrostatische druk is en δ de eenheidstensor.

Als laatste voorbeeld beschouwen we elektrische geleiding bijv. in een anisotroop kristal. De wet van Ohm, die voor isotrope stoffen luidt $\vec{J} = \gamma\,\vec{E}$ of $\vec{E} = \rho\,\vec{J}$ ($\vec{J}$ = elektrische stroomdichtheid) wordt nu

$$\vec{E} = R \, . \, \vec{J} \tag{35}$$

waarin nu de tensor R van de specifieke weerstand voorkomt. Uiteraard zullen symmetrie-eigenschappen van het kristal er toe leiden kunnen dat sommige komponenten van R nul zijn of dat ze onderling afhankelijk zijn (zie het gelijksoortige probleem bij diëlektrika, zoals op het werkkollege behandeld). Men zou naar analogie van de diëlektrische eigenschappen van kristallen misschien verwachten dat R weer steeds symmetrisch is, ook als er geen kristal-symmetrie is. Dit is niet het geval, (35) beschrijft een 'transport-verschijnsel', de relatie tussen $\vec{D}$ en $\vec{E}$ doet dat niet. Met vrij ver gaande thermodynamische beschouwingen kan kan men wel de zgn. relaties van Onsager afleiden: als het kristal in een uitwendig magnetisch veld $\vec{B}_o$ staat, geldt

$$R\,(\vec{B}_o) = \tilde{R}\,(-\,\vec{B}_o) \tag{36}$$

Is $\vec{B}_o = \vec{o}$ dan is R symmetrisch, anders alleen indien $\vec{B}_o$ van richting wordt omgekeerd bij het nemen van de gespiegelde. (36) is experimenteel bevestigd in het niet-trivale geval van bismuth.

III. TENSOR-ANALYSE

§12 Differentiëren van tensoren.

Tensoren, die een funktie zijn van een skalare variabele t, kan men differentiëren en integreren naar t: uiteraard ontstaan dan weer tensoren van dezelfde orde en dimensie.

Is $\vec{r}$ de radiusvektor en zijn de komponenten van een tensor in S_3 (differentieerbare) funkties van $\vec{r}$ (d.w.z. van x_1, x_2 en x_3), is dus aan elke $\vec{r}$ toegevoegd een stel waarden van die komponenten, dan noemen we de verzameling van de waarden een tensorveld in S_3 en schrijven bijv. $\phi(\vec{r})$, $\vec{A}(\vec{r})$, $T(\vec{r})$ etc. Dit kan m.m. uitgebreid worden tot n dimensies. Is x element van vektorruimte S_n dan spreken we analoog van tensorvelden $T\ (x)$ in S_n waarbij T tensor van trap p is.

Differentiëren leidt tot partiële afgeleiden naar de variabelen $x_1, \ldots, x_n$. De n operatoren $\partial/\partial\, x_i$ kunnen formeel behandeld worden als de komponenten van een vektor omdat voor orthogonale transformaties geldt

$$\frac{\partial}{\partial x_i'} = \frac{\partial x_j}{\partial x_i'} \frac{\partial}{\partial x_j} = \alpha_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \qquad (37)$$

omdat $x_j = \alpha^{-1}_{ji}\, x_i' = \tilde{\alpha}_{ji}\, x_i' = \alpha_{ij}\, x_i'$. Voor deze formeel als vektor te hanteren n operatoren gebruiken we het symbool ∇ en de naam nabla, del of atled.

Toegepast op een skalair veld $\phi(x)$ levert ∇ de gradient $\nabla\phi$

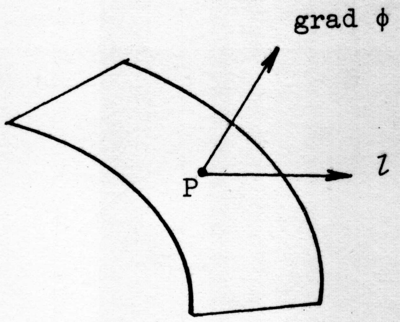
$$(\nabla\phi)_i = (\text{grad}\ \phi)_i = \nabla_i\ \phi = \partial\phi/\partial x_i \qquad (38)$$

als produkt van vektor en skalar zelf een vektor. Deze vektor is in elk punt P van S_n orthogonaal op het plaatselijke niveauvlak, d.i. het (hyper-) vlak $\phi\ (x) =$ konstant $= \phi_p$ hetgeen volgt uit

$$d\ \phi = \text{grad}\ \phi\ .\ dx = \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\ dx_i \qquad (39)$$

en het feit dat $d\phi = o$ voor elke dx rakend aan het niveauvlak.

Als grad $\phi . dx > o$ is voorts $d\phi > o$ dus wijst grad ϕ in de richting van toenemende ϕ.



Het in-produkt van ∇ met een vektor v levert de n-dimensionale <u>divergentie</u>, een skalar

$$\nabla \, . \, v = \text{div } v = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \tag{40}$$

in 3 dimensies al wel bekend, bijv. uit de elektriciteitsleer. In een genormeerd veldlijnenbeeld geeft div v de 'brondichtheid' van de veldlijnen aan.

Nieuw is het tensorieel produkt ∇v van ∇ met een vektor, die naar analogie van het tensorieel produkt ∇v de <u>gradiententensor</u> van v heet, een tensor van de 2e trap, ook wel Grad v genoteerd

$$(\nabla v)_{ij} = (\text{Grad } v)_{ij} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \tag{41}$$

(let op de plaatsen van i en j). Het spoor van deze dyade is juist div v. Ga na dat Grad $x = \delta$. Naar analogie van (39) geeft Grad v in laagste orde aan, hoe v verandert bij 'kleine' veranderingen van de variabele x. Preciezer:

$$dv = dx \, . \, \text{Grad } v = \widetilde{\text{Grad}\; v} \, . \, dx \tag{42}$$

Evenzo beschrijft $\hat{n}$. Grad v de verandering van v per lengte-eenheid in de richting $\hat{n}$. Een voorbeeld ervan was de kracht op een dipool in een inhomogeen elektrisch veld (Elektrostatika) : $\vec{F} = \vec{p}$. Grad $\vec{E}$.

Grad v is uniek te splitsen in symmetrisch en anti-symmetrisch deel. Het laatste leidt tot een generalisatie van de grootheid rot $\vec{v}$ uit de vektor-analyse in S_3. We definiëren:

$$2(\text{Grad } v)_A = \nabla v - \widetilde{\nabla v} \equiv \text{Rot } v \quad \text{dus } (\text{Rot } v)_{ij} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \tag{43}$$

In 3 dimensies geeft (43) precies de 3 komponenten van rot $\vec{v}$. Inderdaad is Rot $\vec{v}$ precies de anti-symmetrische tensor die volgens (21) is toegevoegd aan rot $\vec{v}$ want

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon_3 : \text{Rot}\ \vec{v} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_3 : (\vec{\nabla}\vec{v} - \widetilde{\vec{\nabla}\vec{v}}) = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \text{rot}\ \vec{v} \qquad (44)$$

zoals blijkt door narekenen of toepassen van (A17).

Uitwerking van (43) voor n = 2 en n = 4 vindt u in de Appendix, §12 A.

Tenslotte vormen we nog het in-produkt van ∇ met een tensor T van de 2e trap, een vektor die de <u>vektordivergentie</u> van T heet, ook wel aangeduid als Div T waarbij

$$(\text{Div}\ T)_k = (\nabla\ .\ T)_k = \nabla_i T_{ik} = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i} \qquad (45)$$

Zie verder de Appendix, §12 A.

§13 <u>Toepassingen in de fysika</u>.

Als fysische toepassing noemen we de <u>deformatie-tensor</u>, waarmee infinitesimale deformaties van een kontinu medium beschreven kunnen worden. Een willekeurig punt $\vec{x}$ in het ongedeformeerde medium ondergaat bij de deformatie een verplaatsing $\vec{u}$. Homogene $\vec{u}$ zou een translatie van het medium als geheel betekenen, deformaties ontstaan pas als $\vec{u}$ van $\vec{x}$ afhangt. Hoe wordt een omgeving van $\vec{x}$ vervormd? Beschouw $\vec{x}$ en een naburig punt $\vec{x} + d\vec{x}$ met verplaatsingen $\vec{u}(\vec{x})$ resp. $\vec{u}(\vec{x} + d\vec{x})$. In de infinitesimale benadering is dan (zie (42))

$$\vec{u}(\vec{x} + d\vec{x}) = \vec{u}(\vec{x}) + d\vec{x}\ .\ \text{Grad}\ \vec{u} \qquad (46)$$

waarin de laatste term de verandering $d\vec{u}$ van $d\vec{x}$ als gevolg van de deformatie beschrijft, d.i. de infinitesimale deformatie. We kunnen Grad $\vec{u}$ splitsen in symmetrisch- en anti-symmetrisch deel. Het laatste deel levert

$$d\vec{x} \,.(\text{Grad}\ \vec{u})_A = \tfrac{1}{2}\, d\vec{x}\ .\ \text{Rot}\ \vec{u} = -\ \tfrac{1}{2}\, d\vec{x} \times \text{rot}\ \vec{u} \qquad (47)$$

zoals volgt uit (43) en (A47)(alternatief ter oefening: met $(\text{Grad}\ \vec{u})_A$ is volgens (43) en (44) geassocieerd $\frac{1}{2}$ rot $\vec{u}$ en (47) volgt dan direkt. Met $\vec{\omega} = \frac{1}{2}$ rot $\vec{u}$ wordt (47) dus $\vec{\omega} \times d\vec{x}$ d.i. een infinitesimale draaiing, zoals het eerste lid van (47) al doet verwachten (een anti-symmetrische matrix heet als afbeelding ook infinitesimale draaiing).

Afgezien van translaties en draaiingen wordt de zuivere deformatie dus beschreven door de deformatie-tensor ε

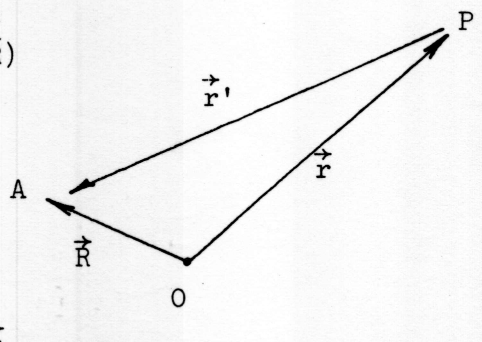
$$\varepsilon = (\text{Grad}\ \vec{u})_S \quad \text{en} \quad d\vec{u} = \varepsilon\ .\ d\vec{x} \qquad (48)$$

Het spoor van ε is div $\vec{u}$ en beschrijft kubische dilatatie. Voorbeelden van deformatietoestanden worden behandeld in het kollege Kontinue Media. Elastische media worden beschreven door lineaire relaties tussen ε en de spanningstensor, d.i. de generalisatie van de wet van Hooke. Dan is $\sigma = c : \varepsilon$ waarin c de elasticiteitstensor is van de 4e orde (zie werkkollege).

Elektrische kwadrupooltensor

Deze tensor treedt op bij de beschrijving van het elektrische veld van een willekeurige statische ladingsverdeling met dichtheid ρ in een begrensd gebied in vakuum.

De bijdrage dV van de lading $\rho(\vec{R})dv$ in een volume-element dv bij A (positie $\vec{R}$) aan de potentiaal $V(\vec{r})$ in punt P (positie $\vec{r}$) is



$$dV = \frac{\rho(\vec{R})dv}{4\pi\ \varepsilon_o\ r'}$$

waarin r' de grootte is van $\vec{r}\,' = \vec{R} - \vec{r}$.

Bij vaste $\vec{r}$ en variabele $\vec{R}$ vinden we de potentiaal in P door integratie van dV over het hele ladingsgebied. Hierbij is r' een funktie van $\vec{R}$ (want $\vec{r}$ is konstant) dus van de komponenten X_i van $\vec{R}$. Voor $\vec{R} = \vec{o}$

krijgt r' de waarde r en we kunnen de funktie 1/r' gaan ontwikkelen om $\vec{R} = \vec{o}$ in een Taylor-reeks naar machten van de X_i :

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} + X_i \left(\frac{\partial}{\partial X_i} \frac{1}{r'} \right)_{R = o} + \frac{1}{2!} X_i X_j \left(\frac{\delta^2}{\partial X_i \partial X_j} \frac{1}{r'} \right)_{R = o} + \ldots \quad (49)$$

1/r' is een funktie van de $x_i' = X_i - x_i$ en blijft dat ook na herhaalde differentiaties naar de variabelen X_i. Dan is ook overal $\partial/\partial X_i =$ $- \partial/\partial x_i$ en voorts

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial X_i} f(r') \right\}_{R = o} = - \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} f(r') \right\}_{R = o} = - \frac{\partial}{\partial x_i} f(r) \quad (50)$$

We vinden dus

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} - \vec{R} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r} + \frac{1}{2!} \vec{R}\vec{R} : \vec{\nabla}\vec{\nabla} \frac{1}{r} + \ldots\ldots \quad (51)$$

en de gezochte potentiaal wordt gegeven door

$$4 \pi \varepsilon_o V(\vec{r}) = \frac{Q}{r} - \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r} + \frac{1}{2!} \mathcal{Q} : \vec{\nabla}\vec{\nabla} \frac{1}{r} + \ldots\ldots \quad (52)$$

Het is een ontwikkeling naar opklimmende machten van 1/r, de <u>multipoolontwikkeling</u>. Voor grote r (op voldoend grote afstand van het ladingsgebied) wordt de potentiaal bepaald door de eerste term die van nul verschilt. De monopoolterm bevat de skalar Q

$$Q = \iiint \rho \, (\vec{R}) \, dv \quad (53)$$

d.i. de totale <u>lading</u> in het gebied (potentiaal als 1/r). De 2e term bevat de vektor $\vec{p}$

$$\vec{p} = \iiint \rho \, (\vec{R}) \, \vec{R} \, dv \quad (54)$$

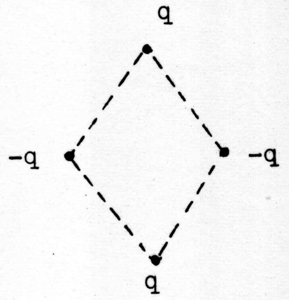
d.i. het <u>dipoolmoment</u> van de ladingsverdeling (uitbreiding van $\Sigma_i q_i \vec{r}_i$ voor een stel puntladingen) ten opzichte van O. Is Q = o dan is dit moment onafhankelijk van de keuze van het referentiepunt O. De dipoolpotentiaal is als $1/r^2$. Is $Q \neq o$ dan kunnen we de oorsprong altijd zo kiezen dat $\vec{p} = \vec{o}$ wordt (nl. kies het ladingszwaartepunt als oorsprong).

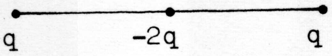
De 3e term bevat de <u>kwadrupooltensor</u> $\mathcal{Q}$

$$Q = \iiint \rho(\vec{R})\ \vec{R}\vec{R}\ dv \qquad (55)$$

wegens de erin voorkomende symmetrische dyade een symmetrische tensor.

De kwadrupoolterm is als $1/r^3$. Eenvoudige ladingsverdelingen met een kwadrupoolveld ($Q = o$ en $\vec{p} = \vec{o}$) zijn hiernaast getekend. De 3e term in (52) verandert niet als we Q vervangen door zijn volgens (29) gedefinieerde 'spoorloze' deel. De reden is dat de tensor waarmee Q gekontraheerd wordt zelf spoorloos is (heeft spoor $\nabla\cdot\nabla \frac{1}{r}$ en dat is o). Nu is het dubbel gekontraheerde produkt van δ met een spoorloze tensor nul, dus mogen we in die 3e term Q verminderen met $\frac{1}{3}$ spoor $(Q)\ \delta$.





Aldus ontstaat de <u>gereduceerde kwadrupooltensor</u>

$$q = Q - \frac{1}{3}\sigma(Q)\ \delta \qquad (56)$$

$$q_{ij} = \iiint \rho\{X_i X_j - \frac{1}{3} R^2 \delta_{ij}\} dv$$

waarin nu nog maar 5 onafhankelijke komponenten. Q en q lijken veel op de traagheidstensor met lading i.p.v. massa (Inderdaad hadden we in (52) Q ook mogen vervangen door een tensor, die slechts door het teken en in de grootheid lading verschilt van de traagheidstensor). Het voordeel van q is dat al zijn komponenten nul worden als de ladingsverdeling <u>bolsymmetrisch</u> is, zoals direkt uit (56) blijkt. Algemeen zijn de q_{ij} dus een maat voor de afwijking van bolsymmetrie.

Een willekeurig kwadrupoolveld kan altijd voortgebracht worden door een passende 'vierpool' in ruitvorm, die op een schaalfaktor na ook door 5 grootheden bepaald is: breng Q op de hoofdassen, kies een der diagonaalelementen = o (dat kan wegens de vrijheid om het spoor te veranderen!) dan blijft een tensor over die precies die vierpool kan beschrijven.

In het kollege Maxwell-theorie zult U zien hoe $V(\vec{r})$ ontwikkeld kan worden naar bolfunkties, waarbij ook de hoek-afhankelijkheid van de opvolgende termen meer expliciet wordt. Ook de multipoolmomenten worden dan met behulp van bolfunkties uitgedrukt.

IV. APPENDIX

§5 A De ε-tensor.

Het ε-symbool kan gebruikt worden om enkele vektorprodukten in S_3 te herschrijven. Later zullen we ze als tensorprodukten definiëren.

Het uit-produkt $\vec{p} = \vec{a} \times \vec{b}$ in S_3 is - zowel voor rechts als links georiënteerde stelsels - gedefiniëerd door

$$p_i = a_j b_k - a_k b_j \tag{A1}$$

waarin i, j, k = 1, 2, 3 of cyclisch. Ga na, dat een ekwivalente definitie is

$$p_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \tag{A2}$$

Het skalare produkt $\vec{c}.(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}.(\vec{c} \times \vec{a})$ d.i. het georiënteerde volume op $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ laat zich schrijven als

$$a_i b_j c_k \varepsilon_{ijk} \tag{A3}$$

zoals direkt uit (14) volgt: dit volume is de bekende determinant uit $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$.

Het ε-symbool laat zich direkt generaliseren tot dimensie n evenals relatie (14). Dit leidt dan tot de algemene Levi-Civita-tensor, gekarakteriseerd door:

- dimensie n
- trap n
- anti-symmetrisch
- isotroop
- pseudo

§6 A <u>Eigenschappen van produkten</u>.

Hieronder volgen een aantal identiteiten c.q. beweringen uit de elementaire tensor-algebra voor evt. later gebruik en ter oefening van de lezer.

$$a\cdot T = \tilde{T}\cdot a \qquad (a \text{ een vektor, } T \text{ van trap 2}) \tag{A4}$$

$$a\cdot T_S = T_S\cdot a \quad \text{en} \quad a\cdot T_A = -\,T_A\cdot a \tag{A5}$$

$$(ab)\cdot u = (b\cdot u)a \quad \text{en} \quad u\cdot(ab) = (u\cdot a)b \tag{A6}$$

$$u\cdot T\cdot v = (uv) : T = v\cdot\tilde{T}\cdot u \tag{A7}$$

$$u\cdot T_A\cdot u = 0 \tag{A8}$$

$$(ab) : (cd) = (a\cdot c)\,(b\cdot d) = a\cdot(cb)\cdot d = (ad) : (cb) \tag{A9}$$

$$T : V = \sigma(T\cdot\tilde{V}) = \text{spoor van } T\cdot\tilde{V} \tag{A10}$$

$$\text{Is } S = \tilde{S} \text{ en } A = -\,\tilde{A} \text{ dan is } S : A = 0 = A : S \tag{A11}$$

$$\text{Dus is ook } T : V = T_S : V_S + T_A : V_A \tag{A12}$$

In het volgende is ε_n de Levi-Civita-tensor van orde (en dimensie) n.

$$(\varepsilon_3\cdot\varepsilon_3)_{ijlm} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \tag{A13}$$

$$\varepsilon_3 : \varepsilon_3 = 2\delta \quad \text{of} \quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mjk} = 2\delta_{im} \tag{A14}$$

$$\varepsilon_3 \vdots \varepsilon_3 = 6 \quad \text{of} \quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6 \tag{A15}$$

§7 A <u>Pseudo-vektoren in S_3. Duale tensoren in S_4</u>.

Is T van trap 2 dan is

$$\varepsilon_3 : T = \varepsilon_3 : (T_S + T_A) = 0 + \varepsilon_3 : T_A = \varepsilon_3 : T_A \qquad \text{(A16)}$$

en voor de dyade $\vec{a}\vec{b}$ vindt men

$$\varepsilon_3 : \vec{a}\vec{b} = \varepsilon_3 : \tfrac{1}{2}(\vec{a}\vec{b} - \vec{b}\vec{a}) = \vec{a} \times \vec{b} \qquad \text{(A17)}$$

Is A toegevoegd aan $\vec{a}$ en B aan $\vec{b}$ dan gelden de volgende identiteiten:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = -\tfrac{1}{2} \text{ spoor } (A\cdot B) = -\tfrac{1}{2}A : \tilde{B} = \tfrac{1}{2}A : B \qquad \text{(A18)}$$

$$\vec{a}\vec{b} = B\cdot A - \tfrac{1}{2} \text{ spoor } (B\cdot A)\delta = B\cdot A + \tfrac{1}{2}(A : B)\delta \qquad \text{(A19)}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \varepsilon_3 : (B\cdot A) = \varepsilon_3 : (B\cdot A)_A \qquad \text{(A20)}$$

$$\vec{b}\cdot A = -A\cdot\vec{b} = -\vec{a}\cdot B = B\cdot\vec{a} = \vec{a} \times \vec{b} \qquad \text{(A21)}$$

Het in (A3) gegeven georiënteerde volume kan natuurlijk ook geschreven worden als $\varepsilon_3 : \vec{a}\vec{b}\vec{c}$ of ook als $\vec{b}\cdot A\cdot\vec{c} = \vec{b}\vec{c} : A$ of soortgelijke vormen met toegevoegde tensoren.

In de relativiteitstheorie zullen we tensoren in S_4 gebruiken. Uiteraard is daar geen verband tussen vektoren en anti-symmetrische tensoren van trap 2. Wel is er het volgende. Zij F een anti-symmetrische tensor van trap 2 in S_4. Dan vormen we (vergelijk (21))

$$F^{*} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_4 : F \qquad \text{(A22)}$$

F^{*} is eveneens anti-symmetrisch van trap 2 en heet de met F <u>duale</u> tensor. F^{*} ontstaat uit F door verwisseling van komponenten

$$F^{*}_{ij} = F_{kl} \text{ (i, j, k, l even permutatie van 1, 2, 3, 4)} \qquad \text{(A23)}$$

Ten duidelijkste is ook F duaal met F^{*} of $F = (F^{*})^{*}$. Dit betekent dat (A22) een 1-1-toevoeging bewerkt van alle echte ant-symmetrische aan alle pseudo anti-symmetrische tensoren van trap 2 in S_4.

§10 A Tensorinvarianten.

Opgave: Voor een anti-symmetrische A geldt bovendien det $(A - \lambda\delta) =$ $= \det (-\tilde{A} - \lambda\delta) = \det -(A + \lambda\delta) = (-1)^n \det (A + \lambda\delta)$ zodat de karakteristieke vorm niet verandert als λ door $-\lambda$ wordt vervangen en elke term met $(-1)^n$ wordt vermenigvuldigd. Ga dit na en leid er uit af dat een aantal invarianten nu nul wordt, nl. de koëfficiënten van λ^{n-1}, λ^{n-3}, ... Inderdaad is altijd $\sigma(A) = 0$ en is det $A = 0$ als n oneven is. Een anti-symmetrische tensor van oneven dimensie heeft dus altijd een eigenwaarde nul. Ga na, dat de daarbij behorende eigenvektor als $n = 3$ juist de met A geassocieerde vektor is.
Als $n = 3$ blijft er dus slechts één niet-triviale invariant over. Ga na dat dit juist het lengte-kwadraat is van de met A geassocieerde vektor.

Opgave: Wat als T pseudo is? Dan is de karakteristieke vorm noch een echte, noch een pseudo-skalar. Toch zijn er echte en pseudo-skalaren aan te wijzen. Ga na wat er i.p.v. (48) komt en leid af dat de koëfficiënten van λ^n, λ^{n-2}, ... invarianten zijn en die van λ^{n-1}, λ^{n-3},.. .. pseudo-invarianten zijn (o.a. het spcor!).
Schrijf ze expliciet uit voor $n = 3$ en voor een anti-symmetrische pseudo-tensor van de 4^eorde (voor later gebruik in de relativiteitstheorie).

§11 A Tensoren in de fysika.

De traagheidstensor

De kinetische energie van rotatie kan nu ook in I en $\vec{\omega}$ worden uitgedrukt. Ga zelf na, dat

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \tfrac{1}{2}\, \vec{\omega}\cdot I\cdot\vec{\omega} = \tfrac{1}{2}\, I : \vec{\omega}\vec{\omega} = \tfrac{1}{2}\, \vec{J}\cdot\vec{\omega} \qquad \text{(A24)}$$

Is $\hat{\omega}$ eenheidsvektor in de richting van $\vec{\omega}$ dan is ook

$$T = \tfrac{1}{2}\,\omega^2\,\hat{\omega}\,.\,\underline{I}\,.\,\hat{\omega} = \tfrac{1}{2}\,I\,\omega^2 \qquad \text{(A25)}$$

waarin I een skalar is, het <u>traagheidsmoment om de as van rotatie</u>:

$$I = \hat{\omega}\,.\,\underline{I}\,.\,\hat{\omega} = \sum_i m_i\{r_i^2 - (\vec{r}_i\,.\,\hat{\omega})^2\} \qquad \text{(A26)}$$

De gebruikelijke definitie van het traagheidsmoment om zekere as, bepaald door de eenheidsvektor $\hat{n}$ is

$$I = \sum_i m_i\,(\vec{r}_i \times \hat{n}\,)^2 \qquad \text{(A27)}$$

waarin het lengte-kwadraat voorkomt van de loodrechte afstand vanuit $\vec{r}_i$ tot die as. Ga na, dat (A26) hetzelfde is als (A27) indien $\hat{n} = \hat{\omega}$.

§12 A <u>Differentiëren en integreren. Bronnen en wervels</u>.

In aansluiting op (39) en de daarbij horende figuur nog het volgende.

Ook bepaalt grad ϕ de 'richtingsafgeleide' van ϕ. Zij $\hat{l}$ eenheidsvektor en $l = 1\,\hat{l}$ een vektor met lengte 1. Beschouw de waardeverzameling van ϕ voor $x = x_p + l$ waarin ϕ bij vaste x_p funktie is van 1 alleen, $\phi = \phi(1)$. Dan is

$$\frac{d\phi}{dl} = \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\left(\frac{\partial x_i}{\partial l}\right)_{\text{langs } l} = \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\,\frac{\partial l_i}{\partial l} = \hat{l}\,.\,\text{grad}\,\phi \qquad \text{(A28)}$$

d.i. de afgeleide van ϕ in de richting $\hat{l}$. Uiteraard is deze maximaal als $\hat{l} \sim$ grad ϕ en nul als $\hat{l}$ raakt aan het niveauvlak.

In (43) is Rot v gedefinieerd. In twee dimensies zouden we daarmee naar analogie van (21) kunnen associëren de skalar

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon_2 : \text{Rot } v = \partial v_2/\partial x_1 - \partial v_1/\partial x_2 \qquad \text{(A29)}$$

en deze rot v in S_2 kunnen noemen.

In 4 dimensies ligt het voor de hand, volgens (A22) de met Rot v duale tensor te vormen

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon_4 : \text{Rot } v = (\text{Rot } v)^{*} \qquad \text{(A30)}$$

waarvan de komponenten weer als in (A23) ontstaan uit die van Rot v door verwisseling.

Tweede afgeleiden.

Wat levert herhaalde toepassing van de ∇-operatoren? Enkele gevallen.

1) $\nabla\nabla\,\phi$ = Grad grad ϕ is een symmetrische tensor
Dat het anti-symmetrische deel nul is leidt direkt tot

$$\text{Rot grad } \phi = 0 \qquad \text{(A31)}$$

In 3 dimensies: rot grad $\phi = \vec{o}$ hetgeen ook direkt te zien is aan de vorm van $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\,\phi = \vec{o}$.

2) $\nabla \cdot \nabla\,\phi$ = div grad $\phi = \Delta\,\phi$ waarin $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ de generalisatie van de operator van Laplace is

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x_i}\,\frac{\partial}{\partial x_i} \qquad \text{(A32)}$$

Meestal reserveert men het symbool Δ voor 3 dimensies. Voor $n = 4$ en bij gebruik van 'Minkowski-koördinaten' $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$ is $\nabla \cdot \nabla$ de zgn. operator van d'Alembert

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} = \Delta - \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} \qquad \text{(A33)}$$

3) Voor $n \geq 3$ is als v vektor is in S_n

$$\nabla \cdot \varepsilon_n : \nabla v = o \quad \text{dus } \nabla \cdot \varepsilon_n : \text{Rot } v = o \qquad \text{(A34)}$$

omdat in $\varepsilon_{i\,..\,kl} \nabla_i \nabla_k v_l$ voor elke l telkens 2 termen (met i en k verwisseld) elkaar opheffen.

Voor $n = 3$ betekent (A34) wegens definitie (44)

$$\text{div rot } \vec{v} = o \qquad \text{(A35)}$$

hetgeen ook direkt te zien is aan de vorm $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = o$.

Voor $n = 4$ betekent (A34) wegens (A30)

$$\text{Div (Rot } v)^{*} = o \qquad \text{(A36)}$$

4) Een relatie, die alleen geldig is in Cartesische koördinaten, is

$$\text{Div } \widetilde{\text{Rot}}\, v = \text{grad div } v - \Delta\, v \qquad \text{(A37)}$$

direkt door uitschrijven te verifiëren. Hierin is Δv een vektor met komponenten Δv_i. Om deze relatie te herschrijven voor $n = 3$ merken we op dat voor een anti-symmetrische tensor A met volgens (20) en (21) geassocieerde vektor $\vec{a}$ geldt dat Div $A = - \varepsilon_3 : \vec{\vec{\nabla a}} = - \frac{1}{2} \varepsilon_3 : (\vec{\vec{\nabla a}} - \widetilde{\vec{\vec{\nabla a}}})$ $= - \frac{1}{2} \varepsilon_3 :$ Rot $\vec{a} = -$ rot $\vec{a}$ volgens (44) zodat (A37) wordt

$$\text{rot rot } \vec{v} = \text{grad div } \vec{v} - \Delta\vec{v} \qquad \text{(A38)}$$

Tenslotte enkele identiteiten voor 3-dim. vektoren (probeer ze af te leiden, bijv. met het $\vec{\nabla}$-symbool):

$$\text{div } (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \text{rot } \vec{a} - a \cdot \text{rot } \vec{b} \qquad \text{(A39)}$$

$$\text{rot } \phi\, \vec{a} = \phi \text{ rot } \vec{a} + \text{grad } \phi \times \vec{a} \qquad \text{(A40)}$$

$$\text{grad } (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\text{Grad } \vec{a}) \cdot \vec{b} + (\text{Grad } \vec{b}) \cdot \vec{a} \qquad \text{(A41)}$$

$$\text{rot } (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \text{Grad } \vec{a} - \vec{a} \cdot \text{Grad } \vec{b} + \vec{a} \text{ div } \vec{b} - \vec{b} \text{ div } \vec{a} \qquad \text{(A42)}$$

$$\text{Grad } \phi\, \vec{a} = \phi \text{ Grad } \vec{a} + \vec{a} \text{ grad } \phi \qquad \text{(A43)}$$

$$\text{div } \vec{a} \cdot T = \vec{a} \cdot \text{Div } \tilde{T} + \text{Grad } \vec{a} : \tilde{T} \qquad \text{(A44)}$$

$$\text{Div } \vec{a}\,\vec{b} = \vec{a} \,.\, \text{Grad } \vec{b} + \vec{b} \text{ div } \vec{a} \qquad \text{(A45)}$$

$$\text{Div } \phi\, T = \text{grad } \phi \,.\, T + \phi \text{ Div } T \qquad \text{(A46)}$$

$$(\text{Rot } \vec{a}).\, \vec{b} = \vec{b} \times \text{rot } \vec{a} \quad \text{en} \quad \vec{b} \,.\, \text{Rot } \vec{a} = - \vec{b} \times \text{rot } \vec{a} \qquad \text{(A47)}$$

Integraalstellingen

We geven beknopt enkele integraalstellingen, die in wezen alleen varianten zijn van de stellingen van Gauss en Stokes. Meer uitgebreide analyse van velden in S_3 kunt U vinden in de literatuur.

De flux van een vektorveld door een oppervlak O was $\iint \vec{A} \,.\, d\vec{O}$, een skalar. Evenzo definieert men de flux van een tensorveld T door O als een vektor

$$\iint_O T \,.\, d\vec{O}$$

Is bijv. T de spanningstensor σ dan is de flux van σ de resulterende reaktiekracht op O in het medium. Ga na, dat de flux van de eenheidstensor δ over een gesloten oppervlak nul is.

Gauss: $$\iiint_V \text{div } \vec{A} \, dv = \oint\!\!\oint_O \vec{A} \,.\, d\vec{O} \qquad \text{(A48)}$$

Kies $\vec{A} = \phi\, \vec{k}$ waarin $\vec{k}$ een willekeurige, maar vaste vektor is. Dan volgt uit (A48) (Ga het na!) de vektorvergelijking

$$\iiint_V \text{grad } \phi \, dv = \oint\!\!\oint_O \phi \, d\vec{O} \qquad \text{(A49)}$$

Vervang in Gauss $\vec{A}$ door $\vec{A} \times \vec{k}$ dan volgt

$$\iiint_V \text{rot } \vec{A} \, dv = \oint\!\!\oint_O d\vec{O} \times \vec{A} = - \oint\!\!\oint_O \vec{A} \times d\vec{O} \qquad \text{(A50)}$$

Kies tenslotte $\vec{A} = \vec{k} \,.\, T$ dan is

$$\iiint_V \text{Div } \tilde{T} \, dv = \oint\!\!\oint_O T \,.\, d\vec{O} \qquad \text{(A51)}$$

Door in (A49) ϕ konstant te kiezen krijgt U een al eerder genoemd resultaat.

Stokes: in gebieden met enkelvoudige samenhang is

$$\iint_O \text{rot } \vec{A} \,.\, d\vec{O} = \oint_K \vec{A} \,.\, d\vec{r} \qquad \text{(A52)}$$

Kies $\vec{A} = \phi\,\vec{k}$ dan volgt

$$\iint_O d\vec{O} \times \text{grad}\,\phi = -\iint_O \text{grad}\,\phi \times d\vec{O} = \oint_K \phi\, d\vec{r} \qquad \text{(A53)}$$

<u>Green I</u>: Pas Gauss toe op $\vec{A} = \phi$ grad ψ :

$$\iiint_V \{\phi\Delta\psi + \text{grad}\,\phi \,.\, \text{grad}\,\psi\}dv = \oiint_O \phi\, \text{grad}\,\psi \,.\, d\vec{O} \qquad \text{(A54)}$$

of in andere vorm

$$\iiint_V \{\phi\Delta\psi + \nabla\phi \cdot \nabla\psi\}dv = \oiint_O \phi \frac{\partial\psi}{\partial n}\, dO \qquad \text{(A55)}$$

Verwissel in (A55) ϕ en ψ en trek het resultaat van (A55) af dan ontstaat <u>Green II</u>:

$$\iiint_V \{\phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi\}dv = \oiint_O \{\phi \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial\phi}{\partial n}\}dO \qquad \text{(A56)}$$

Deze stellingen zijn o.a. voor de potentiaaltheorie van belang. Zie ook Infinitesimaalrekening, pp. 183 e.v., ook voor het verband met eigenschappen van harmonische funkties, de problemen van Dirichlet en Neumann en de uniciteit van de oplossingen van deze problemen onder aangegeven voorwaarden.

Bepaling van een vektorveld uit 'bronnen' en 'wervels'

Een vektorveld $\vec{v}$ is in een eindig gebied G van enkelvoudige samenhang <u>uniek</u> bepaald als daarin gegeven zijn de 'bronnen' div $\vec{v} = \rho$, de 'wervels' rot $\vec{v} = \vec{w}$ en de normale komponent aan de rand van G. Immers: waren er twee oplossingen $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ dan was rot $(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \vec{o}$ in G dus $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ = grad ϕ en voorts div $(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$ = o en dus ook $\Delta\phi$ = o. Dus is ϕ een harmonische funktie en wel met $\partial\phi/\partial n = \hat{n}.\ (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = o$ aan de rand. Dus is ϕ konstant op G en dus grad ϕ = o of $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$.

Meer algemeen is het theorema van <u>Helmholtz</u>:
Als $\vec{v}(\vec{r})$ een kontinu veld is met kontinue div $\vec{v}$ en rot $\vec{v}$ en $/\vec{v}/$ in het

oneindige snel genoeg naar nul gaat (minstens als $r^{-1-\varepsilon}$ met $\varepsilon > o$) terwijl div $\vec{v}$ en $/\text{rot}\ \vec{v}/$ in het oneindige nul worden (minstens als $r^{-2-\varepsilon}$) dan is $\vec{v}$ op een en slechts een manier te schrijven als som $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ waarin $\vec{v}_1$ wervelvrij is en $\vec{v}_2$ bronvrij, d.w.z.

$$\text{rot}\ \vec{v}_1 = \vec{o} \qquad\qquad \text{rot}\ \vec{v}_2 = \text{rot}\ \vec{v} = \vec{w}$$

$$\text{div}\ \vec{v}_1 = \text{div}\ \vec{v} = \rho \qquad\qquad \text{div}\ \vec{v}_2 = o$$

Hierin is G enkelvoudig samenhangend maar niet noodzakelijk eindig.

In deze stelling ligt besloten dat het veld $\vec{v}(\vec{r})$ onder de gegeven voorwaarden uniek bepaald is door zijn 'bronnen' $\rho(\vec{r})$ en 'wervels' $\vec{w}$. Uiteraard moet $\vec{w}$ zelf voldoen aan div $\vec{w} = o$ opdat rot $\vec{v} = \vec{w}$ kan zijn.

Uit rot $\vec{v}_1 = \vec{o}$ volgt $\vec{v}_1$ = grad ϕ en ϕ voldoet aan de Poisson-vergelijking $\Delta\phi = \text{div grad}\ \phi = \text{div}\ \vec{v}_1 = \rho$ met als oplossing (zie hieronder)

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_G \frac{\rho(\vec{r}\,')}{/\vec{r} - \vec{r}\,'/}\, dv(\vec{r}\,') \qquad (A57)$$

en hieruit volgt $\vec{v}_1$ als grad ϕ.

Uit div $\vec{v}_2 = o$ volgt $\vec{v}_2$ = rot $\vec{A}$ (vektorpotentiaal) waarin $\vec{A}$ bepaald is op een term grad ψ na. Deze onbepaaldheid gebruiken we om $\vec{A}$ zo te kiezen dat div $\vec{A} = o$. Dan is rot $\vec{v}_2$ = rot rot $\vec{A} = \vec{w}$. In Cartesische koördinaten geldt (A38) en dus $\Delta\vec{A} = -\vec{w}$. Een oplossing hiervan is analoog aan (A57)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_G \frac{\vec{w}(\vec{r}\,')}{/\vec{r} - \vec{r}\,'/}\, dv(\vec{r}\,') \qquad (A58)$$

en hieruit volgt $\vec{v}_2$ als rot $\vec{A}$.

(A57) en (A58) bepalen dus $\vec{v}_1$ resp. $\vec{v}_2$ in termen van de gegeven funkties $\rho(\vec{r})$ en $\vec{w}(\vec{r})$ en dus ook $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$. Triviaal is natuurlijk dat men bij $\vec{v}_1$ een konstant veld kan optellen en van $\vec{v}_2$ hetzelfde kan aftrekken.

De gevonden $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ zijn (behoudens de genoemde konstante) uiteraard uniek. Ten overvloede: bij een andere $\vec{v}_1' + \vec{v}_2'$ volgt dat zowel $\vec{v}_1' - \vec{v}_1$ als $\vec{v}_2' - \vec{v}_2$ rotatie- en divergentie-vrij zijn dus te schrijven als konstante + grad f met $\Delta f = o$. Maar op de boven aangegeven manier volgt dan dat $f = o$.

Afleiding van (A57): Kies het punt P waar ϕ gezocht wordt tijdelijk als oorsprong. Pas de 2e Green-stelling (A56) toe met speciaal $\psi = 1/r$

$$\oint\!\!\oint_O \left\{\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\right\} dO = \iiint_V \left\{\frac{1}{r}\Delta\phi - \phi\Delta\frac{1}{r}\right\} dv \qquad \text{(A59)}$$

Zij V het gebied tussen een bol met straal r_o om P en een bol met straal R_o om P met het plan $r_o \to o$ en $R_o \to \infty$ te laten gaan. De gezochte ϕ wordt in het oneindige nul, minstens als $r^{-\varepsilon}$ (want div $\vec{v}$ = div $\vec{v}_1 = \Delta\phi$ gaat minstens als $r^{-2-\varepsilon}$). Voor $R_o \to \infty$ gaat dan links de integrand minstens als $r^{-2-\varepsilon}$ terwijl $dO \sim r^2$ en de integraal dus als $r^{-\varepsilon} \to o$ op de grote bol. Op de kleine bol is de 1e integrand van de orde $1/r$ (we hebben div $\vec{v}$ kontinu ondersteld, dus ook div grad ϕ en daarom blijft $\partial\phi/\partial n$ in P en omgeving eindig) en $dO \sim r^2$ dus in de limiet $r_o \to o$ geeft die term nul. De 2e term links bevat $(\partial r^{-1}/\partial n)$ voor $r = r_o$ dat is (omdat de normaal vanuit V naar P toe wijst) $1/r_o^2$. Dus is het linkerlid

$$- 4\,\pi\,\phi\,(P)$$

In het rechterlid is $\Delta\phi = \rho$ terwijl $\Delta r^{-1} = o$ (V bevat niet het punt P waar $r = o$). Dus komt er rechts $\iiint \rho\, dv/r$. Door nu achteraf de oorsprong willekeurig te kiezen zodat P in $\vec{r}$ komt en dv ter plaatse $\vec{r}\,'$ ontstaat (A57).

§14 A Algemene tensoren

We hebben van het begin af ondersteld, dat de fysische ruimte Euclidisch is en tensoren gedefinieerd in S_3 in de onderstelling dat daarin het gebruikelijke in-produkt was gedefinieerd en we dus een rechthoekig assenstelsel konden gebruiken. Evenzo in S_n.

Hoe wordt het als we ons niet tot zulke assenstelsels beperken en bovendien de Euclidische metriek loslaten?

Wat er gebeurt is al te zien door in een Euclidische ruimte over te stappen op een scheef assenstelsel d.w.z. van de ortho-normale basis $e_1, \ldots, e_n$ naar n willekeurige onafhankelijke basisvektoren $g_1, \ldots, g_n$. Als $g_i = \gamma_{ij}\, e_j$ (deze γ_{ij} nu niet meer noodzakelijk orthogonaal, wel niet-singulier) transformeren de komponenten van een vektor x volgens $x'_i = \gamma^{-1}_{ji}\, x_j$. Het in-produkt $x \cdot y$ wordt, uitgedrukt in de nieuwe komponenten,

$$x \cdot y = x_i\, y_i = y'_i\, \gamma_{ij}\, \gamma_{kj}\, x'_k = y'_i\, g_{ik}\, x'_k \qquad \text{(A60)}$$

met $g_{ik} = \gamma_{ij}\,\gamma_{kj}$. Uiteraard is het lengte-kwadraat van x nu $x'_i\, g_{ik}\, x'_k$. Op soortgelijke manier zouden ook andere tensorprodukten gewijzigd worden bij uitschrijven in de nieuwe komponenten.

Men kan echter bereiken dat ook bij scheve assen het in-produkt de vertrouwde vorm behoudt door van iedere vektor x twee representaties te geven of ook: door 2 soorten vektoren te onderscheiden. Dit onderscheid duidt men aan door voor de ene soort beneden-indices en voor de andere boven-indices te gebruiken. Ze verschillen in transformatie van de komponenten. Als van een vektor de komponenten transformeren zoals hierboven x'_i uit de x_j ontstond, spreken we van een <u>kontravariante</u> vektor en noteren

$$v'^{i} = \gamma^{-1}_{ji}\, v^{j} = (\tilde{\Gamma}^{-1})^{i}_{j}\, v^{j} \qquad \text{(A61)}$$

waarbij de sommatie-konventie iets gewijzigd wordt : we sommeren over elke index die eenmaal beneden en eenmaal boven voorkomt.

Evenzo spreken we van een <u>kovariante</u> vektor indien

$$v'_i = \gamma_{ij}\, v_j = \Gamma^{j}_{i}\, v_j \qquad \text{(A62)}$$

(de transformatie is dus dezelfde als van de basisvektoren g_i , vandaar de naam kovariant).

Door nu bij vorming van in-produkten $x \,.\, y$ voor de ene faktor kovariante en voor de andere kontravariante komponenten te nemen komt er

$$x'^{i}\, y'_i = \gamma_{ij}\, \gamma^{-1}_{ji}\, x^{j} y_j = x^{j} y_j \qquad \text{(A63)}$$

De transformatie-matrices van ko- en kontravariante komponenten zijn elkaars gespiegeld-inversen. Bij orthogonale transformaties zijn ze dus gelijk en vervalt het onderscheid tussen kovariant en kontravariant.

Het onderscheid is meer dan alleen een formele handigheid: in de differentiaalmeetkunde en in de daarvan gebruik makende algemene relativiteitstheorie komen grootheden voor die inderdaad verschillend transformeren en dat kan precies door dit onderscheid worden aangegeven.

Algemener kan men nu ko- en kontravariante tensoren van trap p invoeren evenals 'gemengde' met zowel boven- als benedenindices. Dat betekend dat ze t.a.v. sommige indices kovariant en t.a.v. de andere kontravariant karakter hebben.

Natuurlijk gaat het ook niet om het werken met scheve assenstelsels, dat was hier maar een voorbeeld. De volgende stap zou kunnen zijn kromlijnige, orthogonale koördinatenstelsels in S_3 (bijv. bol- en cylinderkoördinaten) en tenslotte ruimtes waarin de metriek niet meer Euclidisch is maar een 'metrische tensor' g_{ij} de meetkunde bepaalt (voor n = 2 bijv. de meetkunde op een boloppervlak). De transformaties (A61) en (A62) zal men dan algemener invoeren als

$$v'^i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} v^j \qquad \text{resp.} \qquad v'_i = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} v_j \tag{A64}$$

Voor een uitvoeriger toelichting verwijzen we naar de leerboeken (bijv. Butkov).

Literatuurlijst

Aharoni, J.	The special theory of relativity, 2nd ed., Oxford U.P., 1965.
Arfken, G.	Mathematical methods for physicists, Academic Press, 1966.
Becker, R., und F. Sauter	Theorie der Elektrizität, Band 1, 17e Aufl., Teubner, 1962.
Billings, A.R.	Tensor properties of materials, John Wiley, 1969.
Borisenko, A.I., and I.E. Tarapov	Vector and tensor analysis with applications, Prentice-Hall, 1968.
Butkov, E.	Mathematical physics, Addison-Wesley, 1968.
Chisholm, J.S.R., and R.M. Morris	Mathematical methods in physics, Noord-Holl.U.M., 1964.
Feynman, R.P. a.o.	The Feynman lectures on physics, Vol. II, Addison-Wesley, 1964.
Hay, G.E.	Vector and tensor analysis, Dover, 1953.
Jeffreys, H.	Cartesian tensors, Cambridge U.P., 1961.
Jeffreys, H., and B.S. Jeffreys	Methods of mathematical physics, 3rd ed., Cambridge U.P., 1956.
Lawden, D.F.	An introduction to tensor calculus and relativity, Methuen, 1962.
Sokolnikoff, I.S.	Tensor analysis - theory and applications, John Wiley, 1951.
Spain, B.	Tensor calculus, 3rd ed., Oliver and Boyd, 1960.
Spiegel, M.R.	Theory and problems of vector analysis, Schaum - McGraw-Hill, 1959.
Teichmann, H.	Physikalische Anwendung der Vektor- und Tensorrechnung, Bibl. Inst., 1963.

TRANSITORIUM I
RIJKSUNIVERSITEIT
UTRECHT

Tentamen Tensor-rekening

8 juni 1973

(Degenen die zowel tensor-rekening als struktuur der materie doen, moeten twee uitslagbriefjes invullen en de oplossingen op aparte vellen papier maken)

1. De kwadrupooltensor $\mathcal{Q}$ van een begrensde ladingsverdeling met ladingsdichtheid $\rho(\vec{r})$ is bij definitie

$$\mathcal{Q} = \iiint_V \rho(\vec{r})\, \vec{r}\, \vec{r}\, dv$$

en dus in het algemeen afhankelijk van de oorsprong-keuze.

a. Indien zowel de totale lading Q als het dipoolmoment $\vec{p}$ van de verdeling nul zijn is $\mathcal{Q}$ onafhankelijk van de oorsprong-keuze.
Bewijs dit. (Voer een translatie van de oorsprong uit over $\vec{a}$)

b. Als van een begrensde ladingsverdeling $\rho(\vec{r})$ gegeven is dat de verdeling omwentelingssymmetrie om een as heeft, welke komponenten van $\mathcal{Q}$ zijn dan bekend indien we de symmetrie-as als z-as kiezen?
Hoeveel onafhankelijke komponenten heeft $\mathcal{Q}$?

c. Bepaal $\mathcal{Q}$ voor een cirkelvormige homogene lijnlading met straal R en totale lading q met in het centrum een puntlading -q.

2. a. Bewijs dat elke echte tensor T van *even* trap en van willekeurige dimensie invariant is voor spiegeling aan de oorsprong (inversie).

b. U is een pseudo-tensor van de 2e trap. Als gegeven is dat U invariant is voor spiegeling aan de oorsprong, wat volgt dan daaruit voor U ?